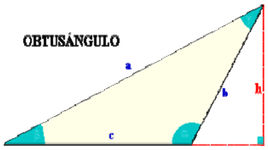
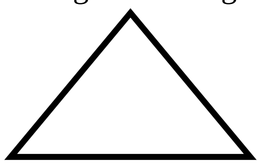


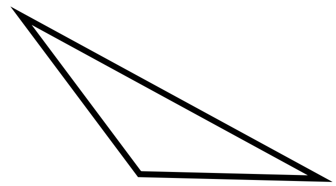
9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un triángulo es oblicuángulo cuando no presenta un ángulo recto, se denomina de dos formas: triángulo acutángulo si tiene tres ángulos agudos y triángulo obtusángulo si tiene un ángulo obtuso, por lo que no es posible resolverlo si aplicamos las funciones trigonométricas.
Ejemplos:

Triángulo acutángulo



Triángulo obtusángulo



Para la solución de triángulos oblicuángulos se utiliza:

- Ley de seno.
- Ley de coseno.

9.1 Ley de Seno

"En cualquier triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

La ley de seno es muy útil para resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen:

caso 1	**AAL Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.**
caso 2	**LLA Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.**

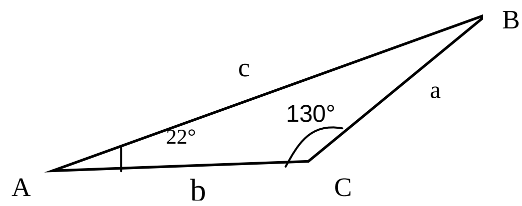
Ejemplos: Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo con los datos que se dan a continuación.

Caso 1(AAL Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos).

Datos:

Lados	Ángulos
a = ?	A =22°
b = ?	B = ?
c = 80	C =130°

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$



Fórmulas

$$A + B + C = 180 \qquad \frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} \qquad \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

-Primero encontraremos el ángulo B.

Como $A + B + C = 180°$

Implica que $B = 180° - A - C = 180° - 22° - 130°$

B = 28°

-Segundo encontraremos "a".

$$\frac{a}{sen22°} = \frac{80}{sen130°} \qquad a = \frac{80sen22°}{sen130°} \qquad a = \frac{80(0.3746)}{0.7660}$$

a = 39.12

- Tercero encontraremos "b".

$$\frac{b}{sen28°} = \frac{80}{sen130°} \qquad b = \frac{(80)sen28°}{sen130°} \qquad b = \frac{(80)(0.4694)}{(0.7660)}$$

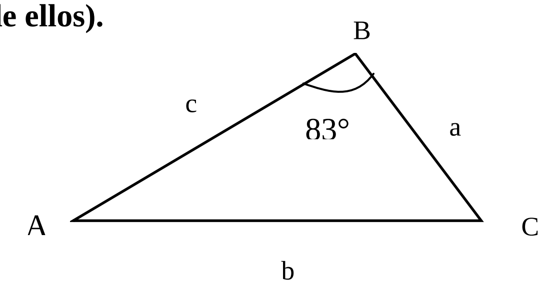
b = 49.02

Caso 2 (LLA Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos).

Datos:

Lados	Ángulos
a = 8	A =?
b = 11.29	B =83°
c = ?	C =?

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$



Fórmulas

$$A + B + C = 180 \qquad \frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \qquad \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

-Primero encontraremos "A".

$$\frac{8}{senA} = \frac{11.29}{sen83°} \qquad senA = \frac{8sen83°}{11.29} \qquad senA = \frac{8(0.9925)}{11.29}$$

A = 44.68°

$senA = 0.7032 \qquad A = sen^{-1}(0.7032)$

-Segundo encontraremos "C".

Como $A + B + C = 180°$

Implica que $C = 180° - A - B = 180° - 44.68° - 83°$

C = 52.32°

-Tercero encontraremos "c".

$$\frac{11.29}{sen83°} = \frac{c}{sen52.32°} \qquad c = \frac{(11.29)sen52.32°}{sen83°} \qquad c = \frac{(11.29)(0.7914)}{(0.9925)}$$

c = 9

EJERCICIO 9-1

INSTRUCCIONES.- Con los datos que se proporcionan, traza el triángulo y calcula los elementos que faltan.

1) Lados Ángulos
a = 68.7 A=?
b = 45 B=38° 57’
c =? C=?

c = 66.07
A = 73.68°
C = 67.37°

2) Lados Ángulos
a = ? A=?
b = 11.36 B=?
c = 9.77 C=53.67°

a = 10.15
A = 56.82°
B = 69.51°

3) Lados Ángulos
a = 42.3 A=?
b = ? B=?
c = 83.44 C=105.5°

b = 61.51
A = 29.23°
B = 45.27°

4) Lados Ángulos
$a = 50$ $A = 99°$
$b = 40$ $B = ?$
$c = ?$ $C = ?$

$c = 24.39$
$B = 52.20°$
$C = 28.8°$

5) Lados Ángulos
$a = ?$ $A = 26°$
$b = ?$ $B = ?$
$c = 18$ $C = 106°$

$a = 8.21$
$b = 13.91$
$B = 48°$

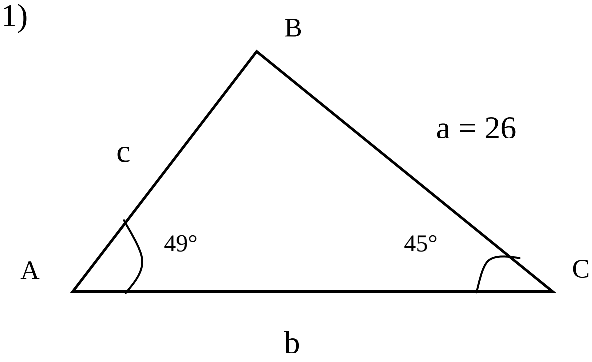
6) Lados Ángulos
$a = ?$ $A = ?$
$b = 40$ $B = 41°$
$c = ?$ $C = 120°$

$a = 19.85$
$c = 52.8$
$A = 19°$

EJERCICIO 9-2

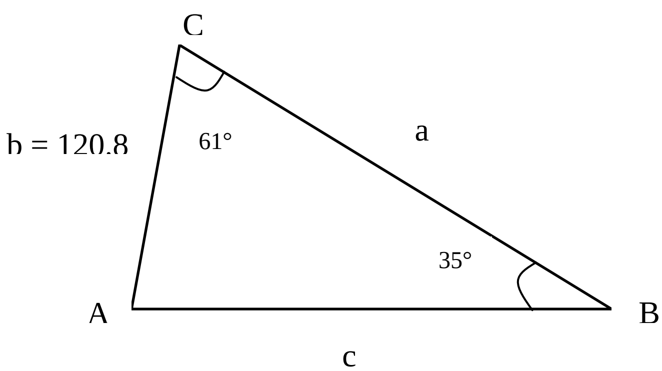
INSTRUCCIONES.- Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos, según la información proporcionada.

1)



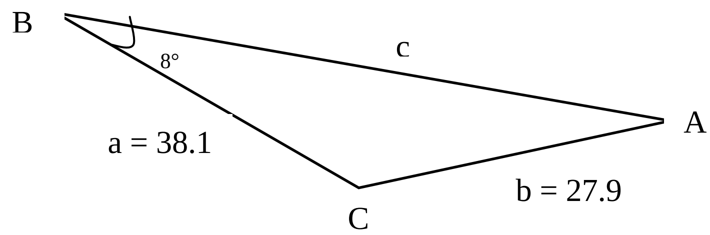
b = 34.37
c = 24.36
B =86°

2)



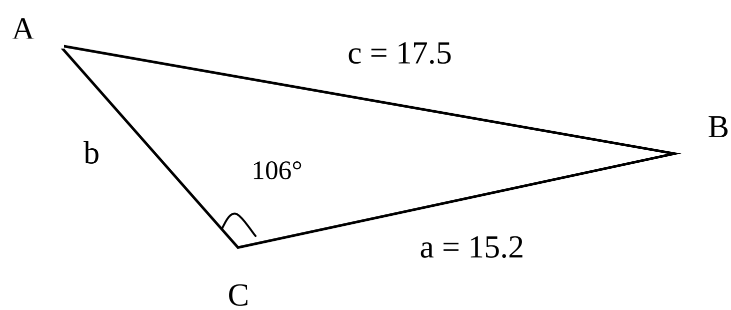
a = 209.45
c = 184.20
A =84°

3)



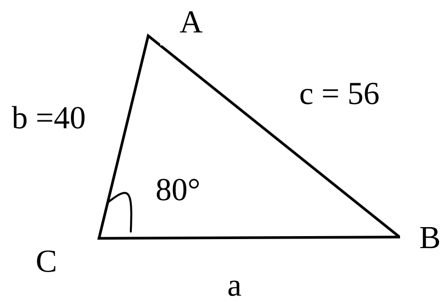
c = 65.10
A = 10.95°
C = 161.05°

4)



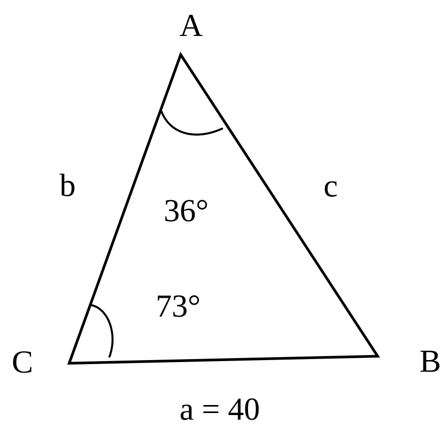
b = 5.44
A = 56.61°
B = 17.39°

5)



a = 46.75
A = 55.3°
B = 44.7°

6)



b = 64.34
c = 65.08
B = 71°

9.2 Ley de Cosenos

"En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman".

PARA ENCONTRAR LADOS	PARA ENCONTRAR ÁNGULOS
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$	$A = \cos^{-1}\left[\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$	$B = \cos^{-1}\left[\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right]$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$	$C = \cos^{-1}\left[\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right]$

La ley de coseno es muy útil para resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen:

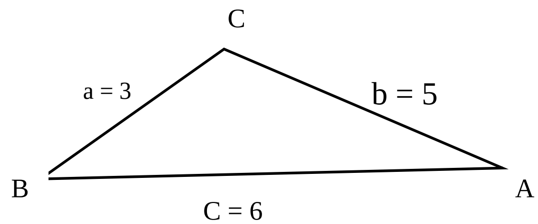
caso 1	**LLL Los tres lados.**
caso 2	**LAL Dos lados y el ángulo comprendido.**

Ejemplos: Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo con los datos que se dan a continuación.

Caso 1 (LLL Cuando se conocen los tres lados).

Datos:

Lados	Ángulos
a = 3	A = ?
b = 5	B = ?
c = 6	C = ?



Fórmulas despejadas:

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right),\quad B=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right),\quad \mathrm{C}=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right),\quad A+B+C=180°$$

-Primero encontraremos el ángulo A.

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{(5)^2+(6)^2-(3)^2}{2(5)(6)}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{25+36-9}{60}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{52}{60}\right)=\cos^{-1}(0.8666)$$

A = 29.92°

-Segundo encontraremos el ángulo B.

$$B=\cos^{-1}\left(\frac{(3)^2+(6)^2-(5)^2}{2(3)(6)}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{9+36-25}{36}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{20}{36}\right)=\cos^{-1}(0.5555)$$

B = 56.25°

-Tercero encontraremos el ángulo C.

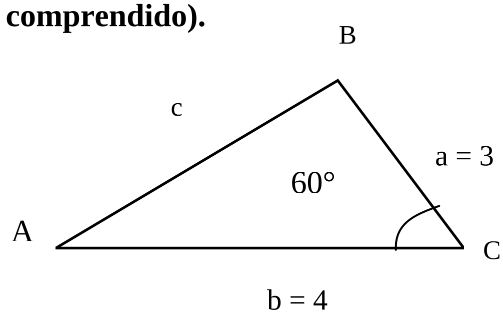
$A+B+C=180°$ $\quad C=180°\text{-}A\text{-}B$ $\quad C=180°-29.92°-56.25°$

C = 93.83°

Caso 2(LAL Dos lados y el ángulo comprendido).

Datos:

Lados	Ángulos
a = 3	A =?
b = 4	B =?
c = ?	C =60°



Fórmulas

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\quad B=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right),\quad A+B+C=180°$$

-Primero encontraremos c.

$$c^2=(3)^2+(4)^2-2(3)(4)\cos 60°,\quad c^2=9+16-24(0.5),\quad c^2=25-12,\ c^2=13$$

c = 3.60

-Segundo encontraremos "B".

$$B=\cos^{-1}\left(\frac{(3)^2+(3.60)^2-(4)^2}{2(3)(3.60)}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{9+12.96-16}{21.6}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5.96}{21.6}\right)=\cos^{-1}(0.2759)$$

B = 73.98°

-Tercero encontraremos A.

$$A+B+C=180°,\quad A=180°-B-C,\quad A=180°-73.98°-60°$$

A = 46.02°

EJERCICIO 9-3

INSTRUCCIONES.- Con los datos que se proporcionan, traza el triángulo y calcula los elementos que faltan.

1)

Lados	Ángulos
a = 12	A = ?
b = 10	B = ?
c = ?	C = 78°

c = 13.93
A = 57.41°
B = 44.59°

2)

Lados	Ángulos
a = 40	A = ?
b = ?	B = 42°
c = 80	C = ?

b = 56.95
A = 28.03°
C = 109.97°

3)

Lados	Ángulos
a =	A = 46.57°
b = 10	B = ?
c = 20	C = ?

a = 15
B = 28.96°
C = 104.47°

4)

Lados	Ángulos
a =	A = 114.97°
b = 50	B = ?
c = 90	C = ?

a = 120
B = 22.19°
C = 42.84°

5)

Lados	Ángulos
a =	A = 29.5°
b = 208	B = ?
c = 208	C = ?

a = 105.91
B = 75.25°
C = 75.25°

6)

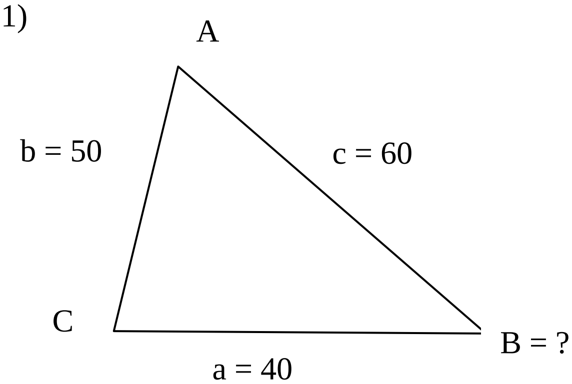
Lados	Ángulos
a = 7	A = ?
b = 12	B = ?
c =	C = 33°

c = 7.21
A = 31.85°
B = 115.15°

EJERCICIO 9-4

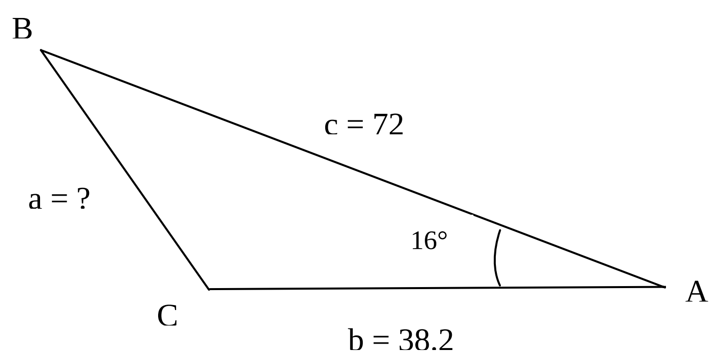
INSTRUCCIONES.- Determina los elementos indicados en las siguientes figuras.

1)



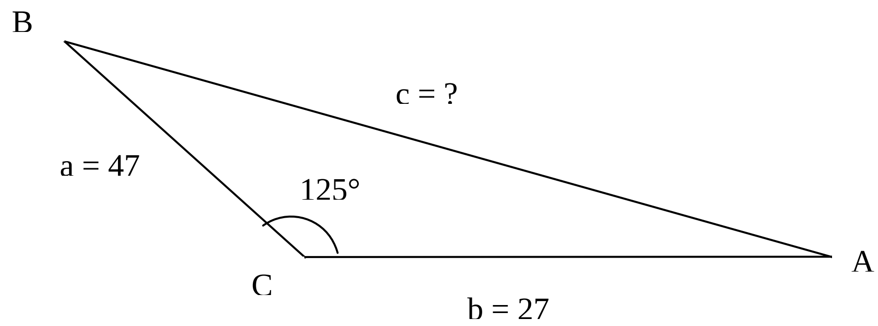
B = 55.71°

2)



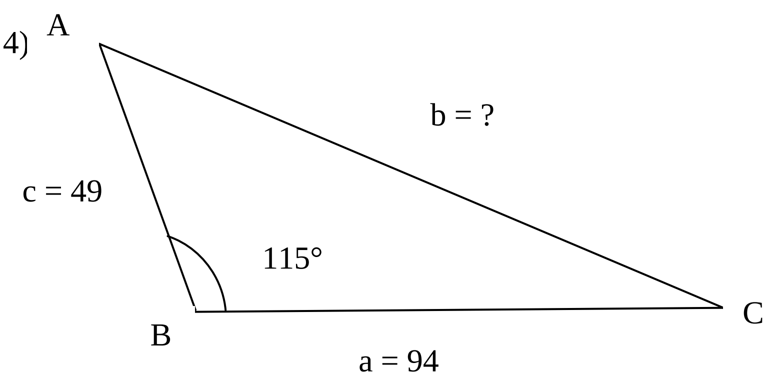
a = 36.82

3)



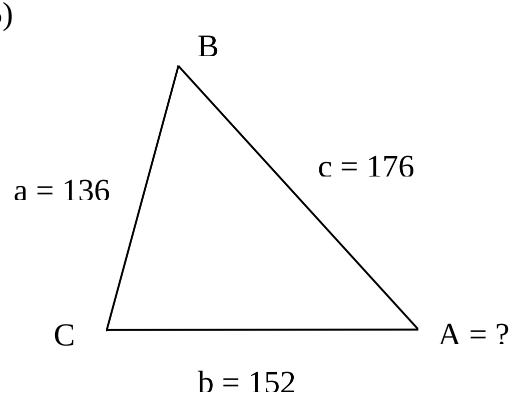
c = 66.29

4)



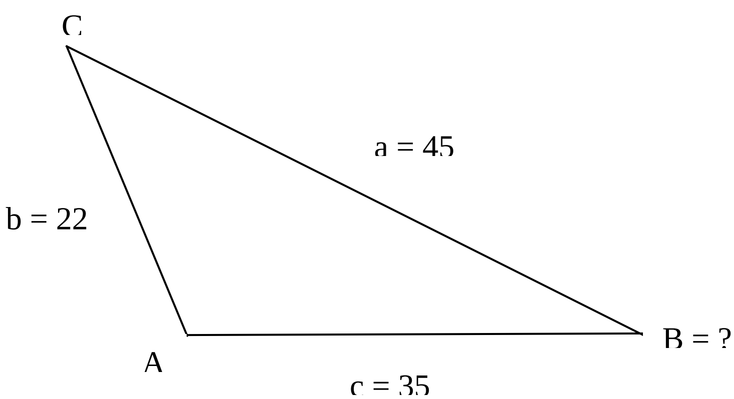
b = 123

5)



A = 48.31°

6)



B = 28.6°